*

Et normalformteorem i teorien om presise deskriptive utsagn.

*

Morten Rognes

1996

*

Innhold

§1 Et normalformteorem i teorien om presise deskriptive utsagn....................................3
§2 En reformulering av normalformsteoremet. Noen korollarer.....................................6
Referanser..9

§1 Et normalformteorem i teorien om presise deskriptive utsagn.

Hovedformålet med dette notatet er å vise en bestemt sats om normalformer i forbindelse med visse utsagnsmengder. I denne paragrafen skal vi innskrenke oss til å formulere og bevise denne satsen. I den neste paragrafen skal vi se på visse korollarer til den.

Det følgende arbeid forutsetter at leseren er fortrolig med Rognes [1], [2] og [3]. Vi skal bruke den notasjon og terminologi som er innført i disse skriftene uten kommentarer. Den satsen vi ønsker å gi bevis for kan formuleres slik:

Teorem 1.1 (Normalformteorem) Anta M(∏) & ø≠∏ Inkl U. La C(∏) være definert ved:
C(∏) = SN(Mg(y: M(y) & y Inkl U & ∏ Inkl y &
(Ax)(xêy –> Neg(x)êy) & (Ax)(xêPt(y) –> SNu(x)êy)))
Holder disse forutsetningene har man:
(Ax)(xêC(∏) –> (EH)(H Inkl Pt(∏) &
x = UNu(Mg(SNu(a U Mg(Neg(x): xê(∏–a))): aêH)))

Som man nokså lett ser kan Teorem 1.1 oppfattes som en generalisering av det velkjente normalformsteoremet for setningslogikk oversatt til språket til utsagnsteorien T;1.

Bevis: Det fremgår av forutsetningene i satsen at C(∏) den minste utsagns-mengden som inneholder ∏ og som er lukket under negasjonsoperatoren Neg og den uendelige konjunksjonsoperasjonen SNu. (Er X en utsagnsmengde er SNu(X) det utsagnet som er konjunksjonen av alle utsagnene i X). Satsen bevises derfor ved induksjon på C(∏).
Vi definerer først en funksjon G : Pt(∏) –> U ved:
(1) G(a) = SNu(a U Mg(Neg(x): xê(∏–a))) for alle aêPt(∏).
Det er hensiktsmessig å vise at G har visse egenskaper. Anta a,bêPt(∏) og at a≠b. Da finnes det x0 slik at x0êa & ¬(x0êb) eller omvendt. Vi ser bare på det første tilfelle siden det andre blir helt analogt. Anta for reduktio ad absurdum at wê(s(G(a))Ωs(G(b)). Fra dette og definisjonen av G følger:
(2) (Ax)(xêa –> True(w,x)) & (Ax)(xê(∏–a) –> True(w,Neg(x)))
Tilsvarende har vi for b:
(3) (Ax)(xêb –> True(w,x)) & (Ax)(xê(∏–b) –> True(w,Neg(x)))
Nå er x0êa & a Inkl ∏. Videre har vi ¬(x0ê b). Det følger fra dette at x0êa og at x0ê(∏–b). Fra disse to forholdene, (2) og (3) har man:
True(w,x0) & True(w,Neg(x0)).
Men dette er umulig. Vi har derfor bevist at:
(4) (Aa)(Ab)(a,bêPt(∏) & a≠b –> s(G(a))Ωs(G(b)) = ø)
Dette innebærer at G er en en-entydig funksjon inn i U, med andre ord at:
(5) G: Pt(∏) –(1-1)–> U
Det skulle være åpenbart at s(G(a)) Inkl I om aêPt(∏). Det følger at vi har: UN/aêPt(∏)/(s(G(a))) Inkl I. Anta på den annen side at w er en vilkårlig mulig verden der wêI. Definer a = Mg(y: yê∏ & wês(y)). Da følger at wêSNu(a). Videre har man at dersom zê(∏–a) så ¬(wêz). Herav følger wês(Neg(z)). Man har derfor wês(SNu(Mg(Neg(z): zê(∏–a)))). Det følger at wês(G(a)). Vi har nå bevist:
(Aw)(wêI –> (Ea)(aêPt(∏) & wês(G(a))))
Disse overveielsene viser at man har:
(6) I = UN/aêPt(∏)/(s(G(a)))
Etter disse forberedelsene tar vi fatt på selve beviset:

(i) *Basistrinn.* Vi viser at satsen holder for alle xê∏. Anta xê∏ for vilkårlig x. Definer Δ ved å sette:

Δ = Mg(y: y Inkl ∏ & xêy)

Da har man Δ Inkl Pt(∏). Det vil være tilstrekkelig å bevise at

(7) x = UNu(G(a): aêΔ)

Anta derfor først at wês(x) for vilkårlig w. Definer a;0 ved:

a;0 = Mg(y: yê∏ & wês(y)). Siden xê∏ og wês(x) følger xêa;0. Men man har åpenbart også at a;0 Inkl ∏. Det følger derfor at a;0êΔ. Nå har man i kraft av definisjonen av a;0 at (Ay)(yêa;0 –> wês(y)). Anta yê(∏–a;0). Da har man yê∏ og ¬(yê∏ & wês(y)). Det følger at ¬(wês(y)) og derfor at wês(Neg(y)). Man har altså: (Ay)(yê(∏–a;0) –> wês(Neg(y))). Det følger fra det som her er nevnt at

wês(G(a;0)) & a;0êΔ. Men da:

wê(UNu(Mg(G(a): aêΔ).

Vi har dermed bevist inklusjonen mot høyre i (7). Når det gjelder inklusjonen mot venstre kan man starte med å anta, for vilkårlig w at wês(UNu(G(a): aêΔ)). Da følger det at wês(G(a)) for en eller annen aêΔ. Fra definisjonen av Δ følger i så fall a Inkl ∏ & xêa. Dessuten må man ha, siden wês(G(a)) at:

wês(SNu(a)Ω SNu(Mg(Neg(y): yê(∏–a))))

Herav følger: (Ay)(yêa –> wês(y)). Men siden xêa følger da wês(x). Vi har nå vist s(x) = s(UNu(G(a): aêΔ)). Men fra dette følger (7) ved hjelp av identitets-aksiomet for utsagn.

(ii) *Induksjonstrinn for Neg.* Vi skal anta at påstanden holder for x for så å vise at den holder for Neg(x) gitt at xêC(∏). Med andre ord anta:

(8) xêC(∏) & (EH)(H Inkl Pt(∏) &
x = UNu(Mg(SNu(a U Mg(Neg(x): xê(∏–a))): aêH)))

for så å vise at Neg(x) også oppfyller denne betingelsen.

Fra (8) følger eksistensen av Δ;1 der:

(9) Δ;1 Inkl Pt(∏) &
x = UNu(Mg(SNu(a U Mg(Neg(x): xê(∏–a))): aêΔ;1)))

Definer Δ;2 ved:

(10) Δ;2 = (Pt(∏)–Δ;1). Da er det klart at (11) Δ;2 Inkl Pt(∏) og det vil være tilstrekkelig å bevise:

(12) s(Neg(x)) = s[UNu(Mg(SNu(a U Mg(Neg(x): xê(∏–a))): aêΔ;2)))]

Anta først for vilkårlig w at wês(Neg(x)) med det for øye å bevise inklusjonen mot høyre i (12). Da har vi ¬(wês(x)) og ved hjelp av (9) følger da:

¬(wês(UNu(Mg(SNu(a U Mg(Neg(x): xê(∏–a))): aêΔ;1)))))

Dette er ekvivalent med: ¬(Ea)(aêΔ;1 & wês(G(a))). Siden wêI har vi i lys av (6) at det må finnes a;0 êPt(∏) slik at wês(G(a;0)). Da har man ¬(a;0êΔ;1) og derfor i lys av definisjone av Δ;2 at a;0êΔ;2 = Pt(∏)–Δ;1. Vi har altså at wês(G(b)) for noe bêΔ;2. Men fra dette og definisjonen av G følger:

wês(UNu(Mg(SNu(a U Mg(Neg(x): xê(∏–a))): aêΔ;2))))

Dermed har vi bevist inklusjonen mot høyre i (12).

La oss så vise at inklusjonen mot venstre holder. Anta wês(UNu(Mg(G(a): aêΔ;2))). Det følger da at wêI. Da har man wês(G(a;0)) for noe a;0êΔ;2. Anta for reduktio ad absurdum at ¬(wês(Neg(x))). Da ¬(wê(I –s(x))) og derfor at hvis wêI så har man wês(x). Det følger at wê(x). Fra dette og (9) kan man slutte wês(UN(Mg(G(a): aêΔ;1))). Det følger at det finnes a der aêΔ;1 & aês(G(a)). Sammenfattende har man:

(13) wês(G(a;0)) & a;0êΔ;2 og wês(G(a)) & aêΔ;1

for noen a;0 og a. Herav: wês(G(a;0)ΩG(a)) & aêΔ;1 & a;0ê(Pt(∏)–Δ;1). Da har vi åpenbart at a≠a;0 og a,a;0êPt(∏). Men fra dette og (4) følger s(G(a))Ωs(G(a;0)) = ø som åpenbart gir oss en motsigelse.

(iii) *Induksjonstrinn for SNu.* Anta X Inkl C(∏) og at satsen holder for alle yêX. Anta med andre ord – i det vi først forutsetter at X≠ø – at:
(14) (Ay)(yêX –> (EH)(H Inkl Pt(∏) &
y = UNu(Mg(SNu(a U Mg(Neg(x): xê(∏–a))): aêH)))
Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan man da utlede at det må finnes en funksjon ∑ der vi har:
∑ : X –> Mg(Δ: Δ Inkl Pt(∏)) slik at:
(15) (Ay)(yêX –>. ∑(y) Inkl Pt(∏) & y = UNu(Mg(G(a): aê∑(y))))
Definer Δ;0 ved å sette:
(16) Δ;0 = SN/yêX/(∑(y))
Vi ønsker da å bevise:
(17) s(SNu(X)) = s(UNu(Mg(G(a): aêΔ;0)))
Dette vil være tilstrekkelig. Vi viser først inklusjonen mot høyre i (17): Anta for vilkårlig wêI at wês(SNu(X)). Da har vi i lys av definisjonen av operasjonen SNu at (18) (Ay)(yêX –> wês(y)). I lys av (15) impliserer dette:
(19) (Ay)(yêX –> wês[y] & y = UNu(Mg(G(a): aê∑(y)))).
Dette impliserer i sin tur:
(20) (Ay)(yêX –> wês[UNu(Mg(G(a): aê∑(y)))]) Herav:
(21) (Ay)(yêX –> (Ea)(aê∑(y) & wês(G(a))))
Siden vi nå forutsetter X≠ø har man at y;0êX for noe y;0. Dette og (21) impliserer:
(22) wês(G(a;0)) & a;0ê∑(y;0) for noe a;0.
Anta nå yêX for vilkårlig y. da har man i lys av (21) at det må finnes a;1 slik at wês(G(a;1)) & a;1ê∑(y). Dette og (22) impliserer s(G(a;0))Ωs(G(a;1))≠ø som ved hjelp av (4) innebærer at a;0=a;1 siden a;0,a;1 Inkl ∏. Det følger at
wês(G(a;0)) & a;0ê∑(y).
Vi har, siden y var et vilkårlig element i X, vist:
(23) (Ay)(yêX –> a;0ê∑(y)) & wês(G(a;0))
Dette impliserer at (24) a;0êSN/yêX/(∑(y)) & wês(G(a;0)). Men herav:
wês[UNu(Mg(G(a): aêSN/yêX/(∑(y))))] = s(UNu(Mg(G(a): aêΔ;0))
Dette viser at inklusjonen mot høyre i (17) holder, gitt at X≠ø.

La oss så vise inklusjonen mot venstre i (17). Anta for vilkårlig w at
(25) wês(UNu(Mg(G(a): aêΔ;0))). Da finnes det noe a slik at
(26) aêΔ;0 & wês(G(a)). I lys av definisjonen av Δ;0 har man herav:
(27) (Ay)(yêX –> aê∑(y)) & wês(G(a))
Anta yêX for vilkårlig y. Da følger ved hjelp av (27) at aê∑(y) & wês(G(a)). Dette innebærer at (Eb)(bê∑(y) & wês(G(b))). Dette er i sin tur ekvivalent med wês(UNu(Mg(G(b): bê∑(y)). Vi har derfor:
(Ay)(yêX –> wês(UNu(Mg(G(b): bê∑(y))). Dette og (15) impliserer (Ay)(yêX –> wês(y)). Herav har man: wês(SNu(X)) som er det vi ønsker. Dette viser at inklusjonen mot venstre i (17) holder under forutsetning av at X≠ø.

La oss tilslutt vise at man har:
(28) SNu(X) = UNu(Mg(G(a): aê Δ) for noe Δ Inkl Pt(∏) om X=ø.
Er X=ø har man:
s(SNu(X)) = Mg(w: wêI & (Ay)(yêX –>wêy))
= Mg(w: wêI) = I.

Men (6) innebærer at I = UN/aêPt(∏)/(s(G(a))). Setter vi derfor Δ=Pt(∏) følger det at (28) holder. Vi har nå vist at satsen holder for SNu(X) der X Inkl C(∏) gitt at den holder for alle yêX.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 1.1. **Q.E.D.**

§2 En reformulering av normalformsteoremet. Noen korollarer.

Anta ∏ er en ikke-tom mengde med utsagn. Er da Δ Inkl ∏ kaller vi utsagnet
SNu(Δ)ΩSNu(Mg(Neg(y): yê(∏–Δ)) for tilstandsbeskrivelsen bestemt av Δ relativt til ∏. Vi kaller et utsagn for en tilstandsbeskrivelse relativt til ∏ om det er en tilstandsbeskrivelse bestemt av Δ relativt til ∏ for en eller annen utsagnsmengde Δ Inkl ∏. Innfører vi denne terminologien kan man si at normalformsteoremet ovenfor sier at dersom ∏ er en ikke-tom utsagnsmengde og Δ er den minste utsagnsmengden som inneholder ∏ og som er lukket under negasjon og uendelig konjunksjon så er ethvert utsagn i Δ identisk med en disjunksjon av tilstandsbeskrivelser relativt til ∏. La oss definere:

Definisjon 2.1
(i) C(∏) = SN(Mg(y: M(y) & y Inkl U & ∏ Inkl y &
(Az)(zêy –> Neg(z)êy) & (Az)(M(z) & z Inkl y. –> SNu(z)êy).
(ii) TB(x,Δ,∏) <–> ∏êPt(U) & M(Δ) & Δ Inkl ∏ &
x= SNu(Δ)ΩSNu(Mg(Neg(y): yê(∏–Δ))
(iii) TBS(x,∏) <–> ∏êPt(U) & (EΔ)(TB(x,Δ,∏)

Man ser fra denne definisjonen at C(∏) er den minste utsagnsmengden som inneholder ∏ og som er lukket under negasjon og uendelig konjunksjon. Videre ser man at TB(x,Δ,∏) innbærer nøyaktig at x er en tilstandsbeskrivelse bestemt av Δ relativt til ∏, og at TBS(x,∏) vil si at x er en tilstandsbeskrivelse relativt til ∏.

Gitt denne definisjonen kan normalformsteoremet ovenfor formuleres mer konsist på følgende måte:

Teorem 2.2 (Normalformteorem II)
ø≠∏êPt(U) –> (Ax)(xêC(∏) –> (EY)(YêPt(Mg(z: TBS(z,∏)) & x = UNu(Y)))

Vi overlater til leseren å vise at de to formuleringene av normalformteoremet er ekvivalene.

Som et korollar til normalformteoremet nevnes den følgende sats:

Teorem 2.3 Anta ∏;1,∏;2ê(Pt(U)-{ø}) og at C(∏;1) = C(∏;2). Da har man:
Mg(x: TBS(x,∏;1))–{k} = Mg(x: TBS(x,∏;2))–{k}

Dette teoremet er av en viss interesse fordi det viser at mengden av tilstands-beskrivelser relativt til en utsagnsmengde ∏ i en viss forstand er entydig bestemt av ∏. Det bør bemerkes at "k" betegner det kontradiktoriske utsagnet, det vil si det utsagnet som har den tomme mengden som sin sannhetsmengde.

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at forutsetningene holder, men at man likevel har (Mg(x: TBS(x,∏;1))–{k}) ≠ (Mg(x: TBS(x,∏;2))–{k}. Da finnes det x;0 der
(1) x;0êMg(x: TBS(x,∏;1))–{k} & ¬(x;0ê(Mg(x: TBS(x,∏;2))–{k})) eller der
(2) x;0ê(Mg(x: TBS(x,∏;2))-{k}) & ¬(x;0êMg(x: TBS(x,∏;1))–{k})
Vi ser bare på det ene tilfellet siden det andre blir helt analogt. Fra (1) følger: TBS(x;0,∏;1) & x;0≠k. Siden TBS(x;0,∏;1) har vi at x;0êC(∏;1) og derfor, siden

C(∏;1) = C(∏;2), at x;0êC(∏;2). I lys av normalformteoremet finnes det da en mengde Z Inkl Mg(x: TBS(x,∏;2)) slik at (3) x;0 = UNu(Z). Det følger at Z ikke kan være nullmengden for i så fall har man x;0 = UNu(ø)=k og dette strider mot (1). Man har derfor at Z≠ø. Det følger også at ¬(x;0êZ). Vi kan heller ikke ha at Z ={y} for noe yêU. I dette tilfellet har vi at x;0 = UNu({y}) =y. Men da følger
x;0=yê{y} Inkl Z Inkl Mg(x: TBS(x,∏;2)) og derfor i lys av (1) at
x;0êMg(x: TBS(x,∏;2))–{k}. Dette strider mot (1). Det følger at Z må inneholde minst to elementer z;1,z;2ê(Mg(x: TBS(x,∏;2)). Vi kan anta at z;1 og z;2 begge er forskjellige fra det kontradiktoriske utsagnet k. For anta at Z = {z;1,z;2} og at for eksempel z;1=k. Da måtte vi ha
x;0 = UNu(Z) = UNu({z;1,z;2}) = UNu({k,z;2}) = kUz;2 = z;2.
Men i så fall ville x;0ê(Mg(x: TBS(x,∏;2) – {k}) som er umulig. Tilsvarende om z;2 var k. Heller ikke kan både z;1 og z;2 være identiske med k. Det følger at dersom Z= {z;1,z;2} så er begge elementene i Z forskjellige fra k.

Nå har man at Z Inkl C(∏;2) og derfor at Z Inkl C(∏;1). I lys av normalformteoremet må det derfor finnes en funksjon F : Z –> Pt(Mg(x: TBS(x,∏;1))) slik at

(4) (Ay)(yêZ –> y= UNu(F(y)))

Fra dette og (3) følger så at

(5) x;0 = UNu(Z) = UNu(Mg(UNu(F(y)): yêZ))
= UNu(UN(Mg(F(y):yêZ)

Siden z;1,z;2 er med i Z og z;1≠z;2 har vi at s(z;1)Ωs(z;2)=ø. Man har dessuten at z;1≠k og z;2≠k. Vi har videre i lys av (4) at

(6) z;1 = UNu(F(z;1)) & z;2 = UNu(F(z;2)) Siden z;1 såvel som z;2 er forskjellige fra det kontradiktoriske utsagnet må det finnes a,b der vi har:

(7) s(a)≠ø & s(b)≠ø & aêF(z;1) og bêF(z;2) Videre må vi ha at

(8) a,bêMg(x: TBS(x,∏;1))

Fra (7) følger at s(a) Inkl s(UNu(F(z;1))) og s(b) Inkl s(UNu(F(z;2))) Fra dette og (5) følger derfor at

(9) s(a)Us(b) Inkl s(x;0).

Men siden a,b er tilstandsbeskrivelser relativt til ∏;1 er de innbyrdes disjunkte. Det er nå to muligheter:

Tilfelle (i): x;0=a v x;0=b. Er x;0=a har vi at s(x;0)Ωs(b)=ø. Dette, (7) og (9) gir en åpenbart en motsigelse. Er x;0=b har vi at s(x;0)Ωs(a)=ø og vi får igjen en motsigelse i lys av (7) og (9).

Tilfelle (ii): x;0 ≠a & x;0≠b. Da har vi, siden x;0,a,b er distinkte tilstandsbeskrivelser relativt til ∏;1, at de alle er innbyrdes disjunkte. Men også dette gir oss en motsigelse i lys av (7) og (9).

Man kan altså utlede en motsigelse i alle tilfelle. Dette innebærer at man ikke kan ha at (1) holder. Holder (2) kan man utlede en motsigelse på helt analogt vis. Dette avslutter beviset for Teorem 2.3. **Q.E.D.**

*

Referanser

*

Referanser

Rognes [1]	Rognes, Morten. *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære.* Maskinskrevet manus. 1985
Rognes [2]	Rognes, Morten. *En teori om presise deskriptive utsagn*. Maskinskrevet manus. 1985
Rognes [3]	Rognes, Morten. *En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn.* Maskinskrevet manus. 1987